15-10-18

Πυκνότητα $\mathbb{Q}$ κ' $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Τότε

(i) $\exists\, q \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε $q \in (x, y)$ → Το έχουμε αποδείξει.

(ii) $\exists\, r \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε $r \in (x, y)$

Απόδειξη

*Ισχυρισμός → $\exists$ τουλάχιστον ένας άρρητος ω.

Από το (i) $\exists\, q \in (x-\omega, y-\omega)$

$x - \omega < q < y - \omega \Rightarrow$

$x < q + \omega < y$, $q + \omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Έστω ότι $q + \omega \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow q + \omega = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$$\xrightarrow[\substack{m', n' \in \mathbb{Z} \\ n' \neq 0}]{q = \frac{m'}{n'}} \omega = \frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} = \frac{m n' - m' n}{n \cdot n'} \in \mathbb{Q}$$

Άτοπο

Θεώρημα: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Λήμμα: Αν $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, τότε n^2 περιττός

Απόδειξη: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\Rightarrow n^2$ περιττος.

Απόδειξη Θεωρήματος

Έστω ότι $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$, $(n \neq 0)$, όπου

το κλάσμα $\dfrac{m}{n}$ είναι ανάγωγο.

Περιπτώσεις.

1) m άρτιος $\Rightarrow$ n περριτος (αλλιώς το κλάσμα δεν είναι ανάγωγο)

$$\frac{m^2}{n^2}=2 \Rightarrow m^2=2n^2 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{n^2}{2}$$

↳ $\in \mathbb{N}$ ↳ $\notin \mathbb{Z}$, από το λήμμα.

Άτοπο

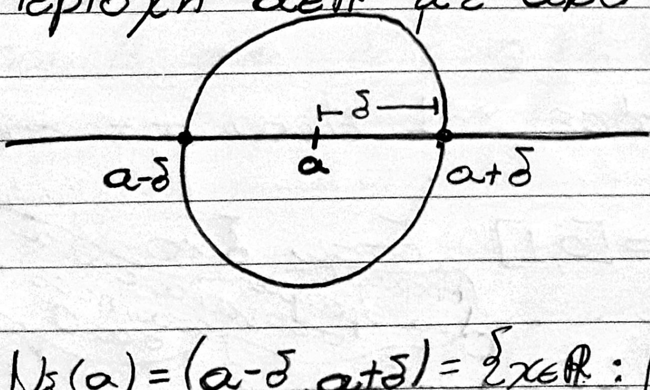
2) m περιττος $\Rightarrow$ $m^2 = 2n^2 \rightarrow$ Άρτιος

↳ περιττος

Άτοπο

Άρα $\sqrt{2} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Περιοχή $a\in\mathbb{R}$ με ακτίνα $\delta>0$



*Επειδή είμαστε σε ευθεία μας ενδιαφέρουν τα σημεία τομής κύκλου και ευθείας.

• $N_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\in\mathbb{R} : |x-a|<\delta\}$

Δακτυλική περιοχή του $a\in\mathbb{R}$ με ακτίνα $\delta>0$.

$N_\delta(a)=N_\delta(a)\setminus\{a\}=\{x\in\mathbb{R} : 0<|x-a|<\delta\}$

Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** του A αν: $\forall \delta > 0$, $N^*_\delta(a) \cap A \neq \emptyset$ *

Παραδείγματα

$0 \to$ σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A$

Απόδειξη $\to$ Έστω $\delta > 0$, $N_\delta^*(0) = (0-\delta, 0+\delta) \setminus \{0\} = (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$

↳ Εξαιρείται

Ερώτηση $\to$ $\exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$?

Θέλουμε $\cancel{-\delta} < \frac{1}{n} < \delta$ κ' $\cancel{\frac{1}{n} \neq 0}$, για

Δεν χρειάζεται

κάποια $n \in \mathbb{N} \iff n > \frac{1}{\delta}$, υπάρχει τέτοιο n.

*Το σύνολο όλων των σ.σ. του A λέγεται παράγωγο σύνολο του A κ' συμβολίζεται A'

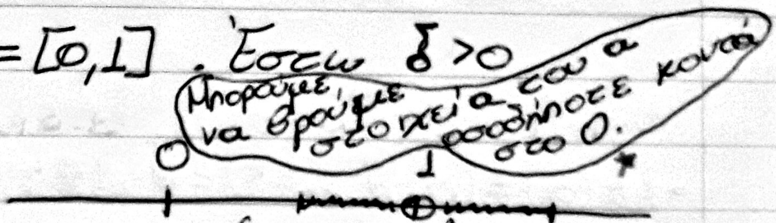
Παράδειγμα

$A = [0,1)$ ή $A = [0,1]$, τότε 1 είναι σ.σ. του A

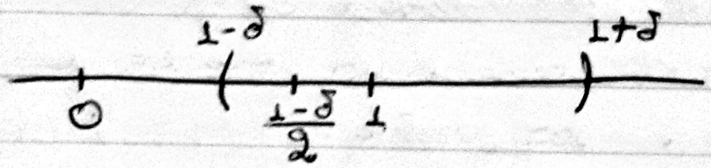
Απόδειξη $\to$ Έστω ότι $A = [0,1]$. Έστω $\delta > 0$

$N_\delta^*(1) = (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$

Θέλαμε $N_\delta^*(1) \cap A \neq \emptyset$



Θέλαμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $x \neq 1$



Παγίδα: δεν ξέραμε πόσο μεγάλο είναι το δ.

• $x = \frac{1-\delta}{2}$, όταν $\delta \leq 1$

• Αν $\delta > 1$ παίρνω $x = 0$

*και στην προκειμένη περίπτωση χωρίς το 1

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σ.σ. του $\mathbb{N}$

Έστω x σ.σ. του $\mathbb{N}$. Αν $\delta>0$ τότε $N_\delta^*(x)\cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow (x-\delta, x+\delta)\setminus\{x\}\cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ *

$\delta \leq \min\{x-[x], x-[x+1]\}$

$((x-\delta),(x+\delta))\setminus\{x\}\cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{N} \neq \emptyset$

* Ψευδές αν δ ακέραιο μέρος. $\Rightarrow$ x δεν είναι σσ του $\mathbb{N}'$

Παράδειγμα

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}/\mathbb{Q})' = \mathbb{R}'$

Έστω $a\in\mathbb{R}$, $\delta>0 \Rightarrow N_\delta^*(a) = (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$

$\exists q\in\mathbb{Q}$, τ.ω. $a-\delta<q<a$

$\Rightarrow \exists q\in\mathbb{Q}$, τ.ω. $q\in N_\delta^*(a) \Rightarrow N_\delta^*(a)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset \Rightarrow a$ σ.σ. του $\mathbb{Q}$

Θεώρημα

Έστω $a\in\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$. Τότε a είναι σ.σ. του A ανν $\forall\, \delta>0$ $N_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ περιέχει άπειρα σημεία του A

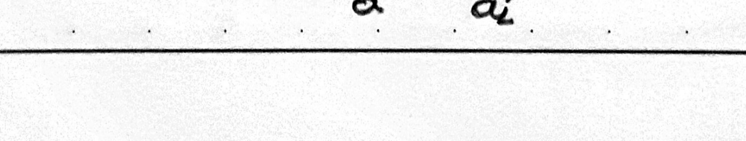
Απόδειξη

- Αν $\delta>0$ $N_\delta(a)$ περιέχει άπειρα σημεία του A
$\Rightarrow \forall\, \delta>0$, $N_\delta(a)\setminus\{a\} = N_\delta^*(a)$

Περιέχει άπειρα σημεία του $A \Rightarrow N_\delta^*(a)\cap A\neq\emptyset$

- a σ.σ. του $A \Rightarrow \forall\delta>0$, $\exists x\in A$, τω $x\in N_\delta^*(a)$

Έστω ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένα στοιχεία του A στην $N_\delta^*(a)$ για κάποιο $\delta>0$.



Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τα στοιχεία του A στην $N_\delta^*(a)$. Βρίσκω $i \in \{1, \ldots, k\}$ τ.ω.
$|a_i - a| = \min\{|a_j - a|, j = 1, \ldots, k\} = \rho$
$\Rightarrow N_\rho^* a \cap A \neq \emptyset$ <u>Άτοπο</u> γιατί υπάρχουν πεπερασμένα στοιχεία. Άρα υπάρχουν άπειρα στοιχεία.

<u>Ορισμός</u>

Σημεία Συσσώρευσης στο $\mathbb{N} \to$ Δεν υπάρχουν $= \emptyset$

- Το $a \in A$ ονομάζεται <u>μεμονωμένο</u> σημείο του A όταν δεν είναι σ.σ. του A. $\Leftrightarrow \exists \, \delta > 0$ τ.ω. $N_\delta^*(a) \cap A \neq \emptyset$

- Το $a \in A$ ονομάζεται <u>εσωτερικό</u> σημείο του A όταν $\exists \, \delta > 0$ τ.ω. $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$

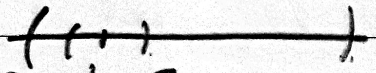
- Το $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>εξωτερικό</u> σημείο του A όταν $\exists \, \delta$ τ.ω. $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A^c$, $\to A$ εξ' ολοκλήρου
$\quad \to \mathbb{R} \setminus A$, $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \emptyset$

- Το $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>συνοριακό</u> σημείο του A αν $\forall \, \delta > 0$, $A \cap (a-\delta, a+\delta) \neq \emptyset$ και $A^c \cap (a-\delta, a+\delta) \neq \emptyset$

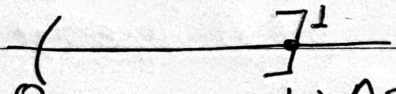
- Το σύνολο όλων των εσωτερικών, εξωτερικών και συνοριακών σημείων του A ονομάζεται εσωτερικό, εξωτερικό, σύνορο αντίστοιχα

- $A \cup A'$, κλειστή θήκη του A.

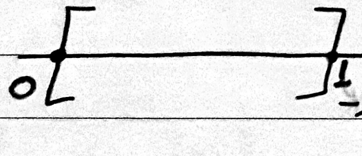
Ένα σύνολο ονομάζεται ανοιχτό όταν όλα του τα σημεία είναι εσωτερικά και κλειστό αν περιέχει όλα τα σ.σ.



0 ↳ Εσωτερικό σημείο



0 ↳ Δεν είναι εσωτερικό το 1



→ Είναι κλειστό σύνολο γιατί περιέχει όλα τα σ.σ.